فصل اول

ماتریس و کاربردها

فصل اول

درس اول: ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها

ماتریس

هر آرایش مستطیلی از عددهای حقیقی، شامل تعدادی سطر و ستون یک **ماتریس** است. هر عدد حقیقی واقع در هر ماتریس را **درایهٔ** آن ماتریس می‌نامیم.

درایه‌های ماتریس را با دو کروشه محصور و معمولاً ماتریس را با حروف بزرگ لاتین نام‌گذاری می‌کنیم.

مثال:

$$A=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۳ \\ ۱ & ۲ & ۰ \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} ۴ & ۵ & ۶ \\ ۱ & ۰ & ۷ \\ \sqrt{۲} & \frac{۱}{۲} & \pi \end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۲ \end{bmatrix}$$

$$D=\begin{bmatrix} ۱ \\ ۳ \\ -۴ \end{bmatrix},\quad E=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix},\quad F=\begin{bmatrix} ۴ \end{bmatrix}=۴$$

(برای ماتریس‌هایی که فقط یک درایه دارند می‌توانیم کروشه نگذاریم.)

مرتبهٔ ماتریس

ماتریس زیر را ببینید:

$$A=\begin{bmatrix} ۳ & ۱ & -۱ \\ ۲ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

در این ماتریس $\begin{bmatrix} ۳ & ۱ & -۱ \end{bmatrix}$ سطر اول و $\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ سطر دوم است.

همچنین $\begin{bmatrix} ۳ \\ ۲ \end{bmatrix}$ ستون اول، $\begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \end{bmatrix}$ ستون دوم و $\begin{bmatrix} -۱ \\ ۱ \end{bmatrix}$ ستون سوم این ماتریس است.

در نتیجه این ماتریس دو سطر و سه ستون دارد.

طبق قرارداد می‌گوییم این ماتریس از مرتبهٔ ۲×۳ است.

در حالت کلی، ماتریسی که دارای m سطر و n ستون است ماتریس از **مرتبهٔ** $m\times n$ (بخوانید m در n) است.

نمایش کلی یک درایه

به ماتریس زیر توجه کنید:

$$A=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۳ \\ ۴ & -۶ & ۰ \end{bmatrix}$$

عدد ۲ درایهٔ روی سطر اول و ستون اول است و درایهٔ ۶- روی سطر دوم و ستون دوم است، همچنین صفر درایهٔ روی سطر دوم و ستون سوم است.

در حالت کلی، درایهٔ واقع در تقاطع سطر iام و ستون jام ماتریس A را با a_{ij} نشان می‌دهیم.

یعنی در ماتریس بالا،

$$a_{۱۱}=۲,\quad a_{۱۲}=-۱,\quad a_{۱۳}=۳$$

$$a_{۲۱}=۴,\quad a_{۲۲}=-۶,\quad a_{۲۳}=۰$$

نتیجه

واضح است که در حالت کلی، یک ماتریس $m\times n$ را می‌توان به صورت زیر نمایش داد:

$$\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} & \cdots & a_{۱n} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} & \cdots & a_{۲n} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳} & \cdots & a_{۳n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m۱} & a_{m۲} & a_{m۳} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

ماتریس فوق را اغلب به صورت $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ نمایش می‌دهیم $(۱\le i\le m\ ,\ ۱\le j\le n)$. به a_{ij} درایهٔ عمومی ماتریس A می‌گوییم.

مسئله ۱ **ماتریس $A=[i^{۲}-j]_{۲\times۳}$ را با درایه‌هایش مشخص کنید.**

راه‌حل صورت کلی ماتریس ۳×۲ را در نظر می‌گیریم:

$$A=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \end{bmatrix}$$

اکنون تک‌تک درایه‌ها را به‌دست می‌آوریم:

$$a_{۱۱}=۱-۱=۰,\quad a_{۱۲}=۱-۲=-۱,\quad a_{۱۳}=۱-۳=-۲$$

$$a_{۲۱}=۴-۱=۳,\quad a_{۲۲}=۴-۲=۲,\quad a_{۲۳}=۴-۳=۱$$

پس

$$A=\begin{bmatrix} ۰ & -۱ & -۲ \\ ۳ & ۲ & ۱ \end{bmatrix}$$

تست ۱

ماتریس‌های $A=[a_{ij}]_{۲\times۳}$ بـا درایه‌های $a_{ij}=\begin{cases} i^{۲}-j & i>j \\ i+j & i=j \\ j^{۲}-i & i<j \end{cases}$ و $B=[b_{ij}]_{۳\times۲}$ با درایه‌های $b_{ij}=ij$ مفروض‌اند. حاصل $\sum_{k=۱}^{۳} a_{۱k}b_{k۲}$ چقدر است؟

۱) ۴۶ ۲) ۵۲ ۳) ۴۸ ۴) ۶۴

راه‌حل با توجه به تعریف سیگما می‌نویسیم:

$$\sum_{k=۱}^{۳} a_{۱k}b_{k۲}=a_{۱۱}b_{۱۲}+a_{۱۲}b_{۲۲}+a_{۱۳}b_{۳۲}$$

اکنون درایه‌هایی را که در رابطهٔ بالا لازم داریم به‌دست می‌آوریم:

$$a_{۱۱}=۱+۱=۲,\quad a_{۱۲}=۲^{۲}-۱=۳,\quad a_{۱۳}=۳^{۲}-۱=۸$$

$$b_{۱۲}=۱\times۲=۲,\quad b_{۲۲}=۲\times۲=۴,\quad b_{۳۲}=۳\times۲=۶$$

سپس این درایه‌ها را در رابطه قرار می‌دهیم:

$$\sum_{k=۱}^{۳} a_{۱k}b_{k۲}=۲\times۲+۳\times۴+۸\times۶=۶۴$$

بنابراین گزینهٔ (۴) درست است.

معرفی چند ماتریس خاص

۱) **ماتریس صفر** ماتریسی است که همهٔ درایه‌های آن صفر است. ماتریس صفر را با $\bar{O}$ نشان می‌دهیم.

$$\bar{O}=\begin{bmatrix}۰\end{bmatrix}_{۱\times۱}=۰,\quad \bar{O}=\begin{bmatrix}۰ & ۰\\ ۰ & ۰\end{bmatrix}_{۲\times۲},\quad \bar{O}=\begin{bmatrix}۰ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰\end{bmatrix}_{۲\times۳}$$

۲) **ماتریس سطری** ماتریسی که یک سطر دارد، ماتریس سطری است، مانند

$$A=\begin{bmatrix}۲\end{bmatrix}_{۱\times۱}=۲,\quad B=\begin{bmatrix}-۱ & ۳\end{bmatrix}_{۱\times۲},\quad C=\begin{bmatrix}۰ & -۱ & \pi\end{bmatrix}_{۱\times۳}$$

صورت کلی ماتریس سطری به صورت $A=[a_{ij}]_{۱\times n}$ است.

۳) **ماتریس ستونی** ماتریسی که یک ستون دارد، ماتریس ستونی است، مانند

$$A=\begin{bmatrix}-۳\end{bmatrix}_{۱\times۱}=-۳,\quad B=\begin{bmatrix}-۱\\ ۲\end{bmatrix}_{۲\times۱},\quad C=\begin{bmatrix}۱\\ -۲\\ \pi\\ ۰\end{bmatrix}_{۴\times۱}$$

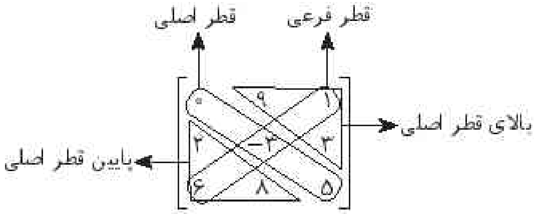
صورت کلی ماتریس‌های ستونی به شکل $A=[a_{ij}]_{m\times۱}$ است.

۴) **ماتریس مربعی** ماتریسی که تعداد سطرها و ستون‌های آن با هم برابرند، ماتریس مربعی است، مانند

$$A=\begin{bmatrix}۵\end{bmatrix}_{۱\times۱}=۵,\quad B=\begin{bmatrix}۱ & -۱\\ ۳ & ۰\end{bmatrix}_{۲\times۲},\quad C=\begin{bmatrix}۱ & -۱ & \pi\\ ۰ & ۱ & ۰\\ ۰ & -۱ & ۵\end{bmatrix}_{۳\times۳}$$

توجه اگــر یک ماتریس مربعی از مرتبهٔ $n\times n$ باشــد، به جــای اینکه بگوییم ماتریس از مرتبهٔ $n\times n$ اســت، می‌گوییم ماتریســی مربعی از مرتبهٔ n اســت. مثلاً در ماتریس‌های قبلی، A مربعی از مرتبهٔ ۱، B مربعی از مرتبهٔ ۲ و C مربعی از مرتبهٔ ۳ است.

تذکر به ماتریس مربعی مقابل توجه کنید:



بــه درایه‌هــای ۰، ۳- و ۵، درایه‌های روی قطــر اصلــی و بــه درایه‌هــای ۱، ۳- و ۶، درایه‌هــای روی قطر فرعــی می‌گوییم. واضح است که در این ماتریس درایه‌های ۱، ۳ و ۹ درایه‌های بالای قطر اصلی و درایه‌های ۲، ۸ و ۶ درایه‌های پایین قطر اصلی هستند.

در حالت کلی، می‌توان این درایه‌ها را به صورت زیر نشان داد:

$$A=[a_{ij}]_{n\times n}:\begin{cases} i=j & \text{روی قطر اصلی قرار دارد } a_{ij} \\ i<j & \text{بالای قطر اصلی قرار دارد } a_{ij} \\ i>j & \text{پایین قطر اصلی قرار دارد } a_{ij} \\ i+j=n+1 & \text{روی قطر فرعی قرار دارد } a_{ij} \end{cases}$$

دقت کنید که قطر اصلی و قطر فرعی فقط برای ماتریس‌های مربعی تعریف می‌شوند.

۵) ماتریس قطری ماتریس مربعی که همهٔ درایه‌های بالا و پایین قطر اصلی آن صفر است، ماتریس قطری است. به زبان ریاضی،

$$A=[a_{ij}]_{n\times n}\,,\quad (i\neq j\Rightarrow a_{ij}=0) \Leftrightarrow A \text{ ماتریس قطری است}$$

ماتریس‌های زیر نمونه‌هایی از ماتریس قطری هستند.

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

توجه در ماتریس‌های قطری، درایه‌های روی قطر اصلی می‌توانند صفر باشند یا نباشند.

۶) ماتریس اسکالر ماتریسی قطری که درایه‌های روی قطر اصلی آن با هم برابرند، ماتریس اسکالر است، مانند

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

۷) ماتریس همانی (واحد) ماتریس اســکالری که درایه‌های روی قطر اصلی آن برابر ۱ اســت، ماتریس همانی است. ماتریس همانی از مرتبهٔ n را با I_n نشان می‌دهیم.

به زبان ریاضی، $I_n=[\delta_{ij}]_{n\times n}$ که در آن $\delta_{ij}=\begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases}$.

مثلاً،

$$I_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\quad I_3=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

تساوی دو ماتریس

دو ماتریس A و B را **مساوی** می‌گوییم هرگاه دارای دو شرط زیر باشند:

۱) هم‌مرتبه باشند.

۲) درایه‌های نظیر آنها با هم برابر باشند.

به عبارتی دو ماتریس $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ و $B=[b_{ij}]_{p\times q}$ مساوی هستند اگر $m=p$ و $n=q$ و به‌ازای هر i و j، $a_{ij}=b_{ij}$. در این حالت می‌نویسیم $A=B$.

تست ۲ اگر دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۱+۲x & y+x \\ ۳ & k \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} x-y & ۳y-۱ \\ ۱-z & x^۲+y \end{bmatrix}$ برابر باشند، مقدار $z+k$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) -۳

راه‌حل چون دو ماتریس از مرتبهٔ ۲ هستند می‌توان نتیجه گرفت که شرط اول تساوی دو ماتریس را دارند. اکنون باید تساوی درایه‌های نظیر به نظیر را بررسی کنیم:

$$\begin{cases} a_{۱۱}=b_{۱۱}\Rightarrow x-y=۱+۲x \\ a_{۱۲}=b_{۱۲}\Rightarrow ۳y-۱=y+x \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x+y=-۱ \\ x-۲y=-۱ \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x=-۱ \\ y=۰ \end{cases}$$

$$a_{۲۱}=b_{۲۱}\Rightarrow ۱-z=۳\Rightarrow z=-۲$$

$$a_{۲۲}=b_{۲۲}\Rightarrow x^۲+y=k\xrightarrow{x=-۱,\ y=۰}k=۱$$

در نتیجه $z+k=-۲+۱=-۱$. بنابراین گزینهٔ (۱) درست است.

جمع ماتریس‌ها

برای جمع کردن یا کم کردن دو ماتریس هم‌مرتبه کافی است درایه‌های نظیر به نظیر را با هم جمع یا تفریق کنیم.

مثال:

$$۱)\begin{bmatrix} -۱ & ۲ & ۳ \\ ۱ & ۰ & ۴ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & -۱ \\ ۷ & ۶ & ۱۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۱+۱ & ۲+۲ & ۳-۱ \\ ۱+۷ & ۰+۶ & ۴+۱۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰ & ۴ & ۲ \\ ۸ & ۶ & ۱۶ \end{bmatrix}$$

$$۲)\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} -۷ & ۵ \\ ۹ & ۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲-(-۷) & -۱-۵ \\ ۳-۹ & ۴-۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۹ & -۶ \\ -۶ & ۴ \end{bmatrix}$$

توجه کنید که فقط ماتریس‌های هم‌مرتبه قابل جمع و تفریق هستند و در حالت کلی

اگر $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ و $B=[b_{ij}]_{m\times n}$، آن‌گاه

$$A+B=[a_{ij}]+[b_{ij}]=[a_{ij}+b_{ij}]_{m\times n}$$

و

$$A-B=[a_{ij}]-[b_{ij}]=[a_{ij}-b_{ij}]_{m\times n}$$

ضرب یک عدد حقیقی در ماتریس

بـــرای ضرب کردن یک عدد حقیقی در یک ماتریس کافی اســت آن عدد را در تمام درایه‌های ماتریس ضرب کنیم. به عبارت دیگر،

$$\left.\begin{array}{l} A=[a_{ij}]_{m\times n} \\ r\in\mathbb{R} \end{array}\right\}\Rightarrow rA=[ra_{ij}]_{m\times n}$$

مثال: اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۲ \\ ۲ & ۰ & ۳ \end{bmatrix}$، آن‌گاه

$$۲A=\begin{bmatrix} ۲ & -۲ & ۴ \\ ۴ & ۰ & ۶ \end{bmatrix},\quad -۳A=\begin{bmatrix} -۳ & ۳ & -۶ \\ -۶ & ۰ & -۹ \end{bmatrix}$$

$$-A=\begin{bmatrix} -۱ & ۱ & -۲ \\ -۲ & ۰ & -۳ \end{bmatrix},\quad ۰A=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}=\overline{O}$$

قرینهٔ یک ماتریس

اگر ماتریس A را در عدد ۱− ضرب کنیم، ماتریس A− به‌دست می‌آید که به آن **قرینهٔ** ماتریس A می‌گوییم.

به عبارت دیگر،

$$A=[a_{ij}]_{m\times n}\Rightarrow \text{قرینهٔ ماتریس } A=-A=[-a_{ij}]_{m\times n}$$

خواص مهم جمع ماتریس‌ها و ضرب عدد در ماتریس

فرض کنید A، B و C سه ماتریس هم‌مرتبه و r و s دو عدد حقیقی باشند. در این صورت خواص زیر برقرارند.

۱) $A+B=B+A$ (خاصیت جابه‌جایی جمع)

۲) $A+(B+C)=(A+B)+C$ (خاصیت شرکت‌پذیری جمع)

۳) $A+\overline{O}=\overline{O}+A=A$ (عضو خنثی برای عمل جمع)

۴) $A+(-A)=(-A)+A=\overline{O}$

۵) $r(A\pm B)=rA\pm rB$

۶) $(r\pm s)A=rA\pm sA$

۷) $(rs)A=r(sA)$

۸) $۱A=A$

۹) $۰A=\overline{O}$ و $r\overline{O}=\overline{O}$

۱۰) اگر $rA=rB$ و $r\neq ۰$، آن‌گاه $A=B$.

۱۱) اگر $A=B$، آن‌گاه $rA=rB$.

مسئله ۲ اگر برای دو ماتریس A و B داشته باشیم $2A+B=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ و $A+B=\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$، ماتریس‌های A و B را بیابید.

راه‌حل مانند یک دستگاه دو معادله و دو مجهول، به سادگی می‌توان A و B را به‌دست آورد:

$$\begin{cases} 2A+B=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \\ A+B=\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \end{cases} \xrightarrow[\text{از هم کم می‌کنیم}]{\text{طرفین تساوی‌ها را}} A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

اکنون ماتریس A را در معادلهٔ دوم قرار می‌دهیم و B را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}+B=\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow B=\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

ضرب ماتریس‌ها

قبل از بیان ضرب دو ماتریس و روش به‌دست آوردن حاصل ضرب دو ماتریس، باید بدانیم که در حالت کلی شرط اینکه دو ماتریس را بتوان در یکدیگر ضرب کرد چیست؟

شرط ضرب‌پذیری دو ماتریس

در حالت کلی، ضرب ماتریس A در ماتریس B را به صورت AB نشان می‌دهیم و این ضرب زمانی انجام‌پذیر است که تعداد ستون‌های ماتریس اول (یعنی ماتریس A) با تعداد سطرهای ماتریس دوم (یعنی ماتریس B) برابر باشد. به عبارتی اگر ماتریس A از مرتبهٔ $m\times n$ باشد، ماتریس B باید از مرتبهٔ $n\times p$ باشد، و حاصل این ضرب یک ماتریس از مرتبهٔ $m\times p$ است. به عبارتی:

$$A_{m\times n}B_{n\times p}=C_{m\times p}$$

اکنون سؤالی که وجود دارد این است که درایه‌های ماتریس C را چگونه باید به‌دست آوریم؟

قبل از بیان این مطلب برای سادگی ضرب یک ماتریس سطری در یک ماتریس ستونی را مورد بررسی قرار دهیم.

ضرب ماتریس سطری در ماتریس ستونی

ماتریس سطری $A_{1\times n}$ و ماتریس ستونی $B_{n\times 1}$ را در نظر بگیرید:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{bmatrix}$$

با توجه به مطالب قبل، حاصل این ضرب یک ماتریس ۱×۱ اســت که در حقیقت یک عدد اســت و این عدد به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$AB=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & \cdots & a_{۱n} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{۱۱} \\ b_{۲۱} \\ \vdots \\ b_{n۱} \end{bmatrix}=a_{۱۱}b_{۱۱}+a_{۱۲}b_{۲۱}+\cdots+a_{۱n}b_{n۱}$$

$$AB=(\text{درایهٔ اول } A)\times(\text{درایهٔ اول } B)+(\text{درایهٔ دوم } A)(\text{درایهٔ دوم } B)+\cdots+(\text{درایهٔ } n \text{ ام } A)(\text{درایهٔ } n \text{ ام } B)$$

و در نهایت طبق خواص سیگما می‌توان آن را به صورت زیر نمایش داد:

$$AB=\sum_{k=۱}^{n} a_{۱k}b_{k۱}$$

مثال: دو ماتریـــس $A=\begin{bmatrix} ۱ & -۳ & ۲ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۵ \\ ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}$ را در نظـــر بگیرید. می‌خواهیم ماتریس **AB** را به‌دست آوریم. با توجه به تعریف ضرب ماتریس سطری در ماتریس ستونی می‌نویسیم:

$$AB=\begin{bmatrix} ۱ & -۳ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۵ \\ ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}=(۱)(۵)+(-۳)(۰)+(۲)(۱)=۷$$

مسئله ۳ **دو ماتریس سطری و ستونی مثال بزنید به طوری که حاصل‌ضرب آنها برابر ۷- باشد؟**

راه‌حل: مثال‌های متفاوتی می‌توان ارائه کرد، به عنوان نمونه $A=\begin{bmatrix} ۰ & -۷ & ۲ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۵ \\ ۱ \\ ۰ \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید.

در این صورت خواهیم داشت

$$AB=\begin{bmatrix} ۰ & -۷ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۵ \\ ۱ \\ ۰ \end{bmatrix}=(۰)(۵)+(-۷)(۱)+(۲)(۰)=-۷$$

ضرب ماتریس‌ها در حالت کلی

اکنون که ضرب ماتریس‌های سطری در ماتریس‌های ستونی را به شرط ضرب شدن یاد گرفتیم، می‌توانیم ضرب دو ماتریس را در حالت کلی مورد بررسی قرار دهیم.

ماتریس‌های $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ و $B=[b_{ij}]_{n\times p}$ را در نظر بگیرید، دیدیم که ضرب ماتریس A در ماتریس B، ماتریسی مانند C از مرتبهٔ $m\times p$ است. به عبارتی

$$AB=C=[c_{ij}]_{m\times p}$$

که در آن هر درایه از ماتریس C را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد:

$$c_{ij} = (\text{سطر } i \text{ ام } A) \times (\text{ستون } j \text{ ام } B)$$

$$= \begin{bmatrix} a_{i۱} & a_{i۲} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{۱j} \\ b_{۲j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix} = a_{i۱}b_{۱j} + a_{i۲}b_{۲j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

و در نهایت طبق خواص سیگما داریم:

$$c_{ij} = \sum_{k=۱}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

در مثال زیر به درایهٔ سطر دوم و ستون سوم ماتریس حاصل‌ضرب دقت کنید:

$$\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۲ \\ ۲ & ۱ & ۳ \\ -۱ & ۲ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۳ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۲ \\ -۱ & ۴ & -۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & -۲ \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

$$۲\times۱ + ۱\times۲ + ۳(-۲) = ۲ + ۲ - ۶ = -۲$$

مثال: دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۳ & -۱ \\ ۷ & ۱ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -۱ & ۲ & ۴ \\ ۵ & ۲ & ۱ \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید، می‌خواهیم حاصل AB را به‌دست آوریم:

$$AB = \begin{bmatrix} ۳ & -۱ \\ ۷ & ۱ \end{bmatrix}_{۲\times۲} \begin{bmatrix} -۱ & ۲ & ۴ \\ ۵ & ۲ & ۱ \end{bmatrix}_{۲\times۳}$$

$$= \begin{bmatrix} -۳-۵ & ۶-۲ & ۱۲-۱ \\ -۷+۵ & ۱۴+۲ & ۲۸+۱ \end{bmatrix}_{۲\times۳} = \begin{bmatrix} -۸ & ۴ & ۱۱ \\ -۲ & ۱۶ & ۲۹ \end{bmatrix}_{۲\times۳}$$

مثال: دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} -۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۲ & ۰ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۳ & ۰ & -۱ \\ ۲ & ۰ & ۰ \\ ۱ & -۲ & ۳ \end{bmatrix}$ مفروض‌اند، می‌خواهیم دو ماتریس AB و BA را محاسبه کنیم:

$$AB = \begin{bmatrix} -۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۲ & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۳ & ۰ & -۱ \\ ۲ & ۰ & ۰ \\ ۱ & -۲ & ۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۳+۲+۱ & ۰+۰-۲ & ۱+۰+۳ \\ ۰+۲+۰ & ۰+۰+۰ & ۰+۰+۰ \\ ۳+۴+۰ & ۰+۰+۰ & -۱+۰+۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & -۲ & ۴ \\ ۲ & ۰ & ۰ \\ ۷ & ۰ & -۱ \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} ۳ & ۰ & -۱ \\ ۲ & ۰ & ۰ \\ ۱ & -۲ & ۳ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۲ & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۳+۰-۱ & ۳+۰-۲ & ۳+۰+۰ \\ -۲+۰+۰ & ۲+۰+۰ & ۲+۰+۰ \\ -۱+۰+۳ & ۱-۲+۶ & ۱+۰+۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۴ & ۱ & ۳ \\ -۲ & ۲ & ۲ \\ ۲ & ۵ & ۱ \end{bmatrix}$$

توجه با بررســی این دو مثال می‌توان به ســادگی فهمید که ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی ندارد، یعنی در حالت کلی **نمی‌توان گفت:**

$$AB=BA$$

تذکر اگر A یک ماتریس مربعی از مرتبهٔ n باشد، آن‌گاه منظور از $A^۲$، یعنی $A\times A$ و $A^۳$، یعنی $A^۲\times A$ و الی آخر. در ضمن دقت کنید فقط ماتریس‌های مربعی را می‌توان به توان رساند. به عنوان مثال ماتریس A از مرتبهٔ ۲×۳ را نمی‌توان به توان رساند زیرا $A_{۲\times۳}\times A_{۲\times۳}$ در تعریف ضرب ماتریس صدق نمی‌کند.

مسئله ۴ **اگر** $A=\begin{bmatrix}۵ & a\\ b & -۲\end{bmatrix}$ **و** $B=\begin{bmatrix}۲ & -۱\\ ۴ & -۲\end{bmatrix}$، **مقادیر a و b را طوری به‌دست آورید که حاصل** $A\times B$ **ماتریسی قطری باشد.**

راه‌حل ماتریس $A\times B$ را به‌دست می‌آوریم:

$$A\times B=\begin{bmatrix}۵ & a\\ b & -۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲ & -۱\\ ۴ & -۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱۰+۴a & -۵-۲a\\ ۲b-۸ & -b+۴\end{bmatrix}$$

می‌دانیم در ماتریس قطری درایه‌های بالا و پایین قطر اصلی صفر هستند، بنابراین

$$\begin{cases}-۵-۲a=۰\Rightarrow a=-\frac{۵}{۲}\\ ۲b-۸=۰\Rightarrow b=۴\end{cases}$$

مسئله ۵ **اگر** $A=\begin{bmatrix}۳ & ۱ & ۰\\ ۲ & ۰ & -۱\\ ۱ & ۱ & ۱\end{bmatrix}$، **مجموع درایه‌های ستون دوم ماتریس** $A^۲$ **را به‌دست آورید.**

راه‌حل چون $A^۲=A\times A$ می‌توان نوشت

$$A^۲=\begin{bmatrix}۳ & ۱ & ۰\\ ۲ & ۰ & -۱\\ ۱ & ۱ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۳ & ۱ & ۰\\ ۲ & ۰ & -۱\\ ۱ & ۱ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cdots & c_{۱۲} & \cdots\\ \cdots & c_{۲۲} & \cdots\\ \cdots & c_{۳۲} & \cdots\end{bmatrix}$$

درایه‌های ستون دوم به صورت زیر به‌دست می‌آیند

$$c_{۱۲}=\begin{bmatrix}۳ & ۱ & ۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱\\ ۰\\ ۱\end{bmatrix}=۳+۰+۰=۳\ ,\quad c_{۲۲}=\begin{bmatrix}۲ & ۰ & -۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱\\ ۰\\ ۱\end{bmatrix}=۲+۰-۱=۱$$

$$c_{۳۲}=\begin{bmatrix}۱ & ۱ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱\\ ۰\\ ۱\end{bmatrix}=۱+۰+۱=۲$$

بنابراین مجموع درایه‌های ستون دوم ماتریس $A^۲$ برابر ۶ است.

مسئله ۲۴ اگر A ماتریسی مربعی باشد، $A^2=A$ و $B=2A-I$، ثابت کنید $A^3+B^3=A+B$

راه‌حل: با توجه به اینکه $A^2=A$، می‌توان گفت $A^3=A$. اکنون باید ثابت کنیم $B^3=B$.

$$B=2A-I \xrightarrow[\text{می‌رسانیم}]{\text{طرفین را به توان دو}} B^2=(2A-I)^2=4A^2-4A+I$$

$$\xrightarrow{A^2=A} B^2=4A-4A+I=I \xrightarrow{B\times} B^3=B$$

پس $A^3+B^3=A+B$.

تست ۵ اگر $(A-I)^2=\bar{O}$، حاصل A^4 برابر کدام است؟

۱) I ۲) $2A-2I$ ۳) $4A-3I$ ۴) $8A-7I$

راه‌حل: به کمک اتحاد مربع می‌نویسیم:

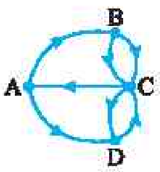
$$(A-I)^2=\bar{O} \Rightarrow A^2-2A+I=\bar{O} \Rightarrow A^2=2A-I \xrightarrow{\text{به توان ۲}} A^4=(2A-I)^2$$

$$A^4=4A^2+I-4A \xrightarrow{A^2=2A-I} A^4=4(2A-I)+I-4A \Rightarrow A^4=4A-3I$$

پس گزینهٔ (۳) درست است.

تمرین

۱- بین چهار تیم فوتبال A، B، C و D مسابقاتی برگزار شده است و نتایج در نمودار زیر رسم شده است. ماتریسی بنویسید که نمایشگر این نمودار باشد.



۲- درایه‌های ماتریس $A=[a_{ij}]_{3\times 3}$ را که در آن $a_{ij}=\begin{cases}2j-i & i<j\\ 2i+j & i\geq j\end{cases}$، مشخص کنید.

۳- ماتریس $A=[a_{ij}]_{3\times 4}$ مفروض است. اگر برای $i=j$ داشته باشیم $a_{ij}=7$، برای $i>j$ داشته باشیم $a_{ij}=i+2j$ و برای $i<j$ داشته باشیم $a_{ij}=i^2-1$، ماتریس A را با درایه‌هایش مشخص کنید.

۴- در ماتریس $A=[a_{ij}]_{3\times 3}$ می‌دانیم $a_{ij}=2ij-5i$. مجموع درایه‌های قطر اصلی A را به‌دست آورید.

۵- اگر در ماتریس $A_{3\times 5}$ درایه‌ها به صورت $a_{ij}=\begin{cases}-i+1 & i>j\\ 2i-j & i=j\\ 1-j & i<j\end{cases}$ تعریف شده باشد، مجموع درایه‌های ماتریس A را تعیین کنید.

۶- دو ماتریس $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{bmatrix}$ در چه صورتی مساوی هستند؟

۷- اگر $A=\begin{bmatrix} ۲x-y & ۵ \\ z & ۱ \end{bmatrix}$ ، $B=\begin{bmatrix} ۳ & ۲x+y \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix}$ و $A=B$ ، مقدار $x-y+۳z$ را بیابید.

۸- حاصل عبارات زیر را پیدا کنید.

الف) $\begin{bmatrix} ۵ & ۳ \\ -۲ & -۴ \end{bmatrix}+۲\begin{bmatrix} -۲ & ۶ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix}-۴\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۲ & -۳ \end{bmatrix}$

ب) $-\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & -۱ \\ ۳ & -۲ & ۱ \\ ۰ & -۴ & ۵ \end{bmatrix}+۲\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۲ \\ ۰ & -۳ & -۲ \\ ۱ & -۳ & -۴ \end{bmatrix}$

۹- ماتریس $B=[b_{ij}]_{۲\times ۲}$ با تعریف $b_{ij}=\begin{cases} ۲i+j & i\geq j \\ ۳i-۲j & i<j \end{cases}$ مفروض است. ماتریس $۳B-۲I$ را به‌دست آورید.

۱۰- از تساوی $\begin{bmatrix} ۲ & -۳ \\ ۴ & ۵ \end{bmatrix}+۳A=\begin{bmatrix} ۵ & -۲ \\ ۶ & ۴ \end{bmatrix}$ ، ماتریس A را به‌دست آورید.

۱۱- از تساوی $\begin{bmatrix} m & ۲ \\ -۱ & n \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -۲ & ۰ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} n & -۱ \\ ۳ & ۲m \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ -۲ & m \end{bmatrix}$ ، مقدار $۲m-۴n$ را به‌دست آورید.

۱۲- ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix} ۳a & -۲ \\ ۰ & ۴ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۲ & b \\ -۱ & c \end{bmatrix}$ در تساوی $B=۲(A-I)$ صدق می‌کنند. حاصل $۲a-b+c$ را به‌دست آورید.

۱۳- فرض کنید $A=\begin{bmatrix} -۴ & -۲ \\ -۱ & ۵ \\ -۳ & ۲ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ -۴ & ۵ \\ ۰ & ۶ \end{bmatrix}$. یک ماتریس ۳×۲ مانند ماتریس C را طوری پیدا کنید که در تساوی $۳A-B-۲C=\overline{O}$ صدق کند.

۱۴- اگر بدانیم $A=\begin{bmatrix} m-۱ & n^۲ \\ ۳ & -۱ \\ ۲ & n \end{bmatrix}$ ، $B=\begin{bmatrix} -m-۱ & n+۲ \\ m+۲ & ۳ \\ ۴ & -۲ \end{bmatrix}$ ، $C=۲A-B$ ، $c_{۲۱}=۳c_{۳۲}$ و $c_{۱۱}=-c_{۲۲}$ ، مقدار $۲m+n$ را به‌دست آورید.

۱۵- در دستگاه ماتریسی زیر درایه‌های ماتریس A را به‌دست آورید.

$$\begin{cases} ۲A+۳B=\begin{bmatrix} ۲ & ۵ \\ -۱ & ۴ \end{bmatrix} \\ ۳A-۲B=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۲ & -۲ \end{bmatrix} \end{cases}$$

۱۶- کارخانه‌ای سه محصول a ، b و c را در دو بازار m و n می‌فروشد. تعداد واحدهای فروخته شدهٔ هر محصول در هر بازار در یک سال معین با ماتریس $A=\begin{array}{c} \\ m \\ n \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ \begin{bmatrix} ۵۰۰۰ & ۲۰۰۰ & ۱۵۰۰ \\ ۲۰۰۰ & ۲۰۰۰ & ۱۰۰۰ \end{bmatrix} \end{array}$ مشخص شده است. ماتریس‌های $B=\begin{bmatrix} ۲ \\ ۴ \\ ۳ \end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix} ۱/۸ \\ ۳/۵ \\ ۲/۵ \end{bmatrix}$ به ترتیب قیمت فروش و قیمت تمام شدهٔ هر واحد از a ، b و c را نشان می‌دهند. درایه‌های هر یک از ماتریس‌های AB ، AC و $AB-AC$ را تعیین و تعبیر کنید.

۱۷- اگر $A=\begin{bmatrix} ۳ & -۱ \\ ۲ & ۴ \\ ۰ & -۲ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۲ & ۵ & -۱ \\ ۱ & ۰ & ۳ \end{bmatrix}$، ماتریس‌های AB و BA را به‌دست آورید.

۱۸- مجموع جواب‌های معادلهٔ ماتریسی $\begin{bmatrix} x^۲+۲x & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x^۲+۲x \\ ۱ \end{bmatrix}=۰$ را به‌دست آورید.

۱۹- دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}$ و $B=[b_{ij}]_{۲\times۲}$ مفروض‌اند. اگر حاصل‌ضرب دو ماتریس A و B خاصیت جابه‌جایی داشته باشد، نشان دهید مجموع درایه‌های روی قطر فرعی B برابر صفر است.

۲۰- اگر ضرب دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۳ & a \\ ۲ & b \end{bmatrix}$ خاصیت جابه‌جایی داشته باشد، مقدار $ab+a+b$ را به‌دست آورید.

۲۱- در تساوی ماتریسی $\begin{bmatrix} x & ۳ \\ ۴ & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۱ \\ ۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} y+۵ \\ -۳x \end{bmatrix}$، مقدار $۳x+y$ را به‌دست آورید.

۲۲- ماتریس $A_{۲\times۲}$ را به گونه‌ای پیدا کنید که در تساوی $A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$ صدق کند.

۲۳- درایه‌های ماتریس A اعدادی طبیعی هستند. اگر $A\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۲ & ۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۲ & ۰ \end{bmatrix}A$، کمترین مقدار مجموع درایه‌های A را به‌دست آورید.

۲۴- دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۴ & a \\ b & -۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید. اگر ماتریس AB ماتریس قطری باشد، مقدار $a+b$ را به‌دست آورید.

۲۵- اگر $A=\begin{bmatrix} ۳ \\ ۲ \end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix} -۲ & ۰ \\ ۳ & -۴ \end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix} -۵ & ۴ \end{bmatrix}$، ماتریس ACB را به‌دست آورید.

۲۶- ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix} ۳ & ۲ & -۱ & ۵ \\ ۰ & ۴ & ۱ & ۶ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} -۱ & ۷ \\ ۳ & ۱ \\ ۰ & ۴ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix}$ داده شده‌اند. درایهٔ سطر سوم و ستون دوم ماتریس BAB را به‌دست آورید.

۲۷- با یک مثال نشان دهید نتیجه‌گیری زیر نادرست است.

$$AB=BA=\bar{O}\Rightarrow A=\bar{O} \text{ یا } B=\bar{O}$$

۲۸- ماتریس‌های A، B و C را به گونه‌ای مثال بزنید که $B\neq C$، ولی $AB=AC$.

۲۹- دوماتریس $A=\begin{bmatrix} ۲ & -۳ & -۵ \\ -۱ & ۴ & ۵ \\ ۱ & -۳ & -۴ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۲ & -۲ & -۴ \\ -۱ & ۳ & ۴ \\ ۱ & -۲ & -۳ \end{bmatrix}$ مفروض‌اند. به کمک آنها نشان دهید نتیجه‌گیری زیر نادرست است.

$$AB=A\Rightarrow B=I$$

فصل اول

درس اول: ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱- ماتریس‌های A و B تعداد قبولی و مردودی در درس هندسه و گسسته در دو مدرسه را نشان می‌دهند. چند درصد از دانش‌آموزان این دو دبیرستان در درس هندسه قبول شده‌اند؟

$$A=\begin{array}{c|cc} & \text{قبول} & \text{مردود} \\ \text{هندسه} & ۹۰ & ۱۰ \\ \text{گسسته} & ۸۹ & ۱۱ \end{array} \qquad B=\begin{array}{c|cc} & \text{قبول} & \text{مردود} \\ \text{هندسه} & ۴۲ & ۸ \\ \text{گسسته} & ۴۰ & ۱۰ \end{array}$$

۱) ٪۱۴ ۲) ٪۸۶ ۳) ٪۸۸ ۴) ٪۱۲/۴

۲- در ماتریس $A=[۲i-j^۲]_{۲\times۲}$ مجموع درایه‌ها برابر کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۳- اگر $A=[ij-۱]_{۳\times۳}$ و $B=[(i-j)^۲]_{۳\times۳}$، مقدار $۲a_{۲۱}b_{۱۲}-۳a_{۳۲}b_{۳۱}$ کدام است؟

۱) -۵۸ ۲) -۱۰ ۳) -۶۲ ۴) -۲۰

۴- ماتریس $A=[a_{ij}]_{۳\times۳}$ با تعریف $a_{ij}=۲j-i$ و ماتریس $B=[b_{ij}]_{۳\times۳}$ با تعریف $b_{ij}=\begin{cases} ۲j-۳i & i<j \\ i-۲j & i\geq j \end{cases}$ مفروض‌اند. مجموع درایه‌های بالای قطر اصلی ماتریس $A-۲B$ چقدر است؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) صفر ۴) -۱

۵- ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix} -۳ & ۰ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۳ & -۲ \end{bmatrix}$ در تساوی $mA-nB=\begin{bmatrix} ۵ & -۴ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix}$ صدق می‌کنند. زوج مرتب (m,n) برابر کدام است؟

۱) $(۲,۱)$ ۲) $(\frac{۱}{۲},-۱)$ ۳) $(۱,-\frac{۱}{۲})$ ۴) این تساوی ممکن نیست.

۶- اگر $A=[۲^{i-j}]_{۲\times۲}$ و $B=[(-۱)^{i+j}]_{۲\times۲}$، ماتریس $۲A+B$ کدام است؟

۱) $۳I_۲$ ۲) $\begin{bmatrix} ۰ & ۳ \\ ۳ & ۳ \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} ۳ & ۳ \\ ۳ & ۰ \end{bmatrix}$ ۴) $I_۲$

۷- با توجه به دستگاه ماتریسی زیر، درایهٔ واقع بر سطر اول و ستون دوم ماتریس A کدام است؟

$$A+B=\begin{bmatrix} ۳ & -۲ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}, \quad ۲A-۳B=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۰ & ۳ \end{bmatrix}$$

۱) $\frac{۳}{۵}$ ۲) -۱ ۳) $\frac{۱۱}{۵}$ ۴) -۲

۸- اگر $A=\begin{bmatrix} b & ۱ \\ a & ۲ \end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix} ۳ & -۱ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}$ و ضرب این دو ماتریس خاصیت جابه‌جایی داشته باشد، مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۹- اگر A و B دو ماتریس 2×2 باشند، $AB=\begin{bmatrix}-1 & \alpha-1\\ 0 & \beta+1\end{bmatrix}$ و $A\begin{bmatrix}2 & -1\\ -3 & 7\end{bmatrix}B+A\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 3 & -6\end{bmatrix}B=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}$، مقدار $2\alpha+\beta$ برابر کدام است؟

۱) صفر ۲) ۴ ۳) ۱ ۴) -2

۱۰- اگر $A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$، ماتریس $(AB-BA)^2$ کدام است؟

۱) I ۲) $A+I$ ۳) $\bar{O}$ ۴) $B+I$

۱۱- اگر $A=\begin{bmatrix}4 & a\\ b & -2\end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix}4 & -3\\ 3 & -2\end{bmatrix}$ و حاصل‌ضرب $A\times B$ ماتریس قطری باشد، مقدار $a-2b$ برابر کدام است؟

۱) $-\frac{15}{2}$ ۲) -6 ۳) -9 ۴) $\frac{15}{2}$

۱۲- مجموع درایه‌های قطر اصلی حاصل‌ضرب دو ماتریس $\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 6 & 2\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}3 & -1 & 5\\ 0 & 4 & 2\\ 0 & 0 & 7\end{bmatrix}$ برابر کدام است؟

۱) ۱۵ ۲) ۳۰ ۳) ۲۰ ۴) ۲۵

۱۳- ماتریس $A=[a_{ij}]_{2\times 3}$ با تعریف $a_{ij}=\begin{cases}i-j & i<j\\ i+j & i=j\\ i-2j & i>j\end{cases}$ و ماتریس $B=[i^2-2j]_{3\times 2}$ مفروض هستند. مجموع درایه‌های ماتریس AB کدام است؟

۱) ۳۸ ۲) -38 ۳) ۲۷ ۴) -27

۱۴- اگر $A=\begin{bmatrix}1 & 3 & -2\\ 0 & 2 & 4\\ 5 & 6 & -1\end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\\ 3 & 4\end{bmatrix}$، $C=\begin{bmatrix}1 & 4 & 5 & -3\\ -1 & 3 & 0 & 2\end{bmatrix}$ و $D=ABC$، درایهٔ سطر دوم و ستون اول ماتریس D برابر کدام است؟

۱) -6 ۲) -4 ۳) ۷ ۴) ۲۶

۱۵- اگر A و B دو ماتریس مربعی باشند به طوری‌که $AB+BA=\bar{O}$، کدام گزینه صحیح است؟

۱) $A^2B^2=AB$ ۲) $A^2B^2=-BA$

۳) $BA^2=A^2B$ ۴) $A^2B=-BA^2$

۱۶- اگر $A+B=7I$، ماتریس $A^2+7B+AB$ برابر کدام است؟

۱) $7I$ ۲) $14I$ ۳) I ۴) $49I$

۱۷- A و B دو ماتریس مربعی هم‌مرتبه هستند و $AB+2BA=\bar{O}$، ماتریس A^2B حتماً کدام است؟

۱) $-2B^2A$ ۲) $2BA^2$ ۳) $-4B^2A$ ۴) $4BA^2$

۱۸- اگر $2AB+BA=\bar{O}$ و $\lambda B^3A=AB^3$، مقدار λ کدام است؟

۱) $\frac{1}{8}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $-\frac{1}{4}$ ۴) $-\frac{1}{8}$

۱۹- اگر A ماتریسی مربعی باشد و $A^2-A=\bar{O}$، حاصل $(2A-I)^{25}$ حتماً کدام است؟

۱) I ۲) $A-I$ ۳) $2A-I$ ۴) $2A+I$

۲۰- اگر $A^2=3A-2I$ و $A^5-A^4=k(A-I)$، مقدار k کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) ۱۶ ۴) ۳۲

۲۱- اگر $A^2=4A-3I$، A^3 برابر کدام است؟

۱) $16A+8I$ ۲) $13A-12I$ ۳) $16A-12I$ ۴) $13A+12I$

۲۲- اگر $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$ و $A^2=2mA-nI_2$، مقدار mn کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۲/۵ ۳) ۵- ۴) ۲/۵-

۲۳- اگر مجموع درایه‌های ماتریس $A=\begin{bmatrix}a & b & b\\ a & b & b\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ یک‌چهارم مجموع درایه‌های ماتریس A^2 باشد، مقدار $a+b$ کدام است؟ $(a\neq -2b)$

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) ۱۰

۲۴- چند ماتریس به شکل $A=\begin{bmatrix}a & b & ab\\ 0 & a & b\\ 0 & 0 & a\end{bmatrix}$ وجود دارد به طوری‌که $A^2=\begin{bmatrix}9 & 2 & 5\\ 0 & 9 & 0\\ 0 & 0 & 9\end{bmatrix}$؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) هیچ ۴) بی‌شمار

۲۵- اگر $A=\begin{bmatrix}1 & 4 & 3 & 12\\ \frac{1}{4} & 1 & 6 & 8\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 1 & 2\\ \frac{1}{12} & \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & 1\end{bmatrix}$، مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس A^2 برابر کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۸ ۳) ۱۶ ۴) ۶

۲۶- اگر $A^2+2A=\bar{O}$، حاصل $(A+I)(-3A-2I)$ کدام است؟

۱) A ۲) $A-2I$ ۳) $A+2I$ ۴) $A-I$

۲۷- اگر $A^2-2A+I=\bar{O}$، ماتریس A^4+I برابر کدام است؟

۱) $8A-3I$ ۲) $2I$ ۳) $4A-2I$ ۴) $8A-2I$

۲۸- اگر A ماتریسی مربعی باشد به طوری‌که $A^3+2A=I$، حاصل $(A^2+I)^2$ کدام است؟

۱) A^2-I ۲) $A-I$ ۳) A^2+I ۴) $A+I$

۲۹- اگر $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}$، ماتریس A^{20} برابر کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix}1 & 20\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}1 & 40\\ 0 & 0\end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix}1 & 40\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}1 & 20\\ 0 & 0\end{bmatrix}$

۳۰- اگر $A=\begin{bmatrix} \sin\alpha\cos\alpha & \cos^{۲}\alpha \\ \sin^{۲}\alpha & \sin\alpha\cos\alpha \end{bmatrix}$، مجموع درایه‌های ماتریس $A^{۱۰۰}$ کدام است؟

۱) $۱+\sin ۲\alpha$ ۲) $۱+\cos ۲\alpha$

۳) $۱+\sin^{۲}\alpha$ ۴) $۱+\cos^{۲}\alpha$

۳۱- اگر $A=\begin{bmatrix} \sqrt{۲} & ۰ \\ ۰ & -\frac{\sqrt{۲}}{۲} \end{bmatrix}$ و $A^{۱۳۸۷}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$، مقدار $a+b+c+d$ کدام است؟

۱) $-\sqrt{۲}$ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۴) $-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۳۲- اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$، مجموع درایه‌های ماتریس $A^{۶}$ کدام است؟

۱) $۳^{۵}$ ۲) $۳^{۶}$ ۳) $۳^{۷}$ ۴) $۳^{۸}$

۳۳- اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$، در ماتریس $A^{۶}$ مجموع درایه‌های ستون دوم کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۲۷

۳۴- اگر $A=\begin{bmatrix} ۲ & -۳ & -۵ \\ -۱ & ۴ & ۵ \\ ۱ & -۳ & -۴ \end{bmatrix}$، حاصل عبارت $A^{۴}-A^{۳}+A^{۲}-A+I$ کدام است؟

۱) $\bar{O}$ ۲) $A+I$ ۳) I ۴) $A-I$

۳۵- ماتریس $A=[i-۱]_{۳\times۳}$ مفروض است. مجموع درایه‌های سطر دوم ماتریس $A^{۵}$ کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۲۴۳ ۳) ۸۱ ۴) ۱۸

۳۶- اگر در ماتریس $A=[a_{ij}]_{۳\times۳}$ داشته باشیم $a_{ij}=\begin{cases} i^{۲}+j^{۲} & i<j \\ ۰ & i\geq j \end{cases}$، آن‌گاه حاصل عبارت $(A^{۳}+I_{۳})(A^{۴}-I_{۳})$ کدام است؟

۱) $A-I_{۳}$ ۲) $A^{۲}-A$ ۳) $A^{۷}-A$ ۴) $A^{۵}-I_{۳}$

۳۷- اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۱ \end{bmatrix}$، مجموع درایه‌های ماتریس $A^{۱۳۹۵}$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) -۱ ۳) صفر ۴) -۳

۳۸- اگر $A=\begin{bmatrix} ۴ & -۳ & ۳ \\ ۴ & -۳ & ۲ \\ ۱ & -۱ & ۰ \end{bmatrix}$، ماتریس $A^{۴}$ کدام است؟ (خارج از کشور ریاضی- ۹۲)

۱) اسکالر ۲) ماتریس صفر

۳) قطری غیرهمانی ۴) همانی

۳۹- ماتریس $A=[a_{ij}]_{3\times 3}$ به صورت $a_{ij}=\begin{cases} 1 & i=j \\ 2 & i\neq j \end{cases}$ تعریف شده است. مجموع درایه‌های ماتریس A^2-4A کدام است؟

(خارج از کشور ریاضی - ۹۶)

۱) ۱۲ ۲) ۱۵ ۳) ۱۸ ۴) ۲۱

۴۰- اگر $A=\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$، مجموع درایه‌های ماتریس $A\times A$ کدام است؟ (تجربی - ۹۷)

۱) ۳۶ ۲) ۴۰ ۳) ۴۲ ۴) ۴۴

۴۱- اگر $A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & 24 \\ \frac{1}{3} & 1 & 2 & 8 \end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 1 & 4 \\ \frac{1}{24} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$، مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس C^2 کدام است؟

(ریاضی - ۹۷)

۱) ۱۶ ۲) ۱۸ ۳) ۲۰ ۴) ۲۴

فصل اول

راه‌حل تمرین‌ها

۱ جهـت پیکان روی هر خط یا منحنی واصل بین دو تیم از طرف تیم برنده به سمت تیم بازنده است. بنابراین ماتریس این شبکهٔ اطلاع‌رسانی به صورت زیر است.

$$\begin{array}{c|cccc} & A & B & C & D \\ \hline A & ۰ & ۱ & ۰ & ۱ \\ B & ۰ & ۰ & ۲ & ۰ \\ C & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ \\ D & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \end{array}$$

۲ ماتریس A، ۶ درایه به صورت زیر دارد.

$$a_{۱۱}=۲(۱)+۱=۳,\quad a_{۱۲}=۲(۲)-۱=۳$$

$$a_{۱۳}=۲(۳)-۱=۵,\quad a_{۲۱}=۲(۲)+۱=۵$$

$$a_{۲۲}=۲(۲)+۲=۶,\quad a_{۲۳}=۲(۳)-۲=۴$$

بنابراین

$$A=\begin{bmatrix} ۳ & ۳ & ۵ \\ ۵ & ۶ & ۴ \end{bmatrix}$$

۳ بنابر تعریف A درایه‌های ماتریس A برابرند با

$$a_{۱۱}=۷,\quad a_{۱۲}=۱^۲-۱=۰,\quad a_{۱۳}=۱^۲-۱=۰$$

$$a_{۱۴}=۱^۲-۱=۰,\quad a_{۲۱}=۲+۲=۴,\quad a_{۲۲}=۷$$

$$a_{۲۳}=۲^۲-۱=۳,\quad a_{۲۴}=۲^۲-۱=۳,\quad a_{۳۱}=۳+۲=۵$$

$$a_{۳۲}=۳+۴=۷,\quad a_{۳۳}=۷,\quad a_{۳۴}=۳^۲-۱=۸$$

بنابراین

$$A=\begin{bmatrix} ۷ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۴ & ۷ & ۳ & ۳ \\ ۵ & ۷ & ۷ & ۸ \end{bmatrix}$$

۴ چون مجمـوع درایه‌های قطر اصلی A را می‌خواهیم، پـس فقط همین درایه‌ها را با تعریف داده شـده پیدا می‌کنیم. $a_{۱۱}$، $a_{۲۲}$ و $a_{۳۳}$ درایه‌های قطر اصلی ماتریس A هستند:

$$a_{۱۱}=۲(۱)(۱)-۵(۱)=-۳$$

$$a_{۲۲}=۲(۲)(۲)-۵(۲)=-۲$$

$$a_{۳۳}=۲(۳)(۳)-۵(۳)=۳$$

پس مجموع درایه‌های قطر اصلی A برابر است با

$$a_{۱۱}+a_{۲۲}+a_{۳۳}=-۳-۲+۳=-۲$$

۵ درایه‌هـای ماتریـس $A_{۲\times۵}$ را با تعریف داده شـده به‌دست می‌آوریم.

$$a_{۱۱}=۲(۱)-۱=۱,\quad a_{۱۲}=۱-۲=-۱$$

$$a_{۱۳}=۱-۳=-۲,\quad a_{۱۴}=۱-۴=-۳$$

$$a_{۱۵}=۱-۵=-۴,\quad a_{۲۱}=-۲+۱=-۱$$

$$a_{۲۲}=۲(۲)-۲=۲,\quad a_{۲۳}=۱-۳=-۲$$

$$a_{۲۴}=۱-۴=-۳,\quad a_{۲۵}=۱-۵=-۴$$

بنابراین

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & -۲ & -۳ & -۴ \\ -۱ & ۲ & -۲ & -۳ & -۴ \end{bmatrix}$$

پس مجموع درایه‌های ماتریس A برابر -۱۷ است.

۶ این دو ماتریس هم‌مرتبه نیسـتند، اولی از مرتبهٔ ۲×۳ و دومی از مرتبهٔ ۳×۲ اسـت، پس در هیچ صورتی نمی‌توانند مساوی باشند. توجه داشته باشید که شرط برابری دو ماتریس هم مرتبه بودن آنها و برابری درایه‌های نظیر به نظیر آنها است.

۷ در دو ماتریـس مسـاوی درایه‌های نظیـر دو به دو مساوی‌اند. پس

$$A=B\Rightarrow\begin{cases} ۳=۲x-y \\ ۲x+y=۵ \\ z=-۲ \end{cases}$$

$$\begin{cases} ۲x-y=۳ \\ ۲x+y=۵ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{+} ۴x=۸\Rightarrow x=۲,\ y=۱$$

بنابراین $x-y+۳z=۲-۱+۳(-۲)=-۵$.

۸ می‌دانیم ماتریس‌های هم‌مرتبه قابل جمع و تفریق هستند، بنابراین

الف)

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}+2\begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}-4\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -4 & 12 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 8 & -12 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & 11 \\ -8 & 6 \end{bmatrix}$$

ب)

$$-\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 0 & -4 & 5 \end{bmatrix}+2\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -5 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 0 & -6 & -4 \\ 2 & -6 & -8 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 0 & -2 & 5 \\ -3 & -4 & -5 \\ 2 & -2 & -13 \end{bmatrix}$$

۹ ابتدا با تعریف داده شده درایه‌های ماتریس B را به‌دست می‌آوریم:

$$b_{11}=2+1=3,\quad b_{12}=3-4=-1$$

$$b_{21}=4+1=5,\quad b_{22}=4+2=6$$

پس

$$B=\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

بنابراین

$$3B-2I=3\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}-2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 15 & 16 \end{bmatrix}$$

۱۰ تساوی داده شده را به صورت زیر می‌نویسیم تا ماتریس A را پیدا کنیم:

$$3A=\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}\Rightarrow 3A=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

۱۱ دو طرف تساوی را حساب می‌کنیم، سپس درایه‌های نظیر را مساوی هم قرار می‌دهیم:

$$\begin{bmatrix} m & 2 \\ -1 & n \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} n & -1 \\ 3 & 2m \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & m \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} m-2 & 2 \\ 1 & n+1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} n+1 & 2 \\ 1 & 3m \end{bmatrix}$$

بنابراین

$$\begin{cases} m-2=n+1 \\ n+1=3m \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} m-n=3 \\ 3m-n=1 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{کم می‌کنیم}} 2m=-2\Rightarrow m=-1$$

در نتیجه $n=-4$. پس

$$2m-4n=2(-1)-4(-4)=-2+16=14$$

۱۲ ماتریس‌های A و B را در تساوی داده‌شده قرار می‌دهیم:

$$B=2(A-I)\Rightarrow\begin{bmatrix} 2 & b \\ -1 & c \end{bmatrix}=2\left(\begin{bmatrix} 3a & -2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$\begin{bmatrix} 2 & b \\ -1 & c \end{bmatrix}=2\begin{bmatrix} 3a-1 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & b \\ -1 & c \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6a-2 & -4 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

اکنون درایه‌های نظیر این دو ماتریس را مساوی هم قرار می‌دهیم:

$$6a-2=2\Rightarrow a=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

$$b=-4,\ c=6$$

بنابراین

$$2a-b+c=\frac{4}{3}+4+6=\frac{34}{3}$$

۱۳ ماتریس‌های A و B را در تساوی داده شده قرار می‌دهیم تا ماتریس C را پیدا کنیم:

$$3A-B-2C=\bar{O}\Rightarrow 3\begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -1 & 5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 5 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}-2C=\bar{O}$$

$$\begin{bmatrix} -12 & -6 \\ -3 & 15 \\ -9 & 6 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 5 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}=2C\Rightarrow\begin{bmatrix} -14 & -9 \\ 1 & 10 \\ -9 & 0 \end{bmatrix}=2C$$

$$C=\begin{bmatrix} -7 & -\frac{9}{2} \\ \frac{1}{2} & 5 \\ -\frac{9}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

۱۴ ابتدا درایه‌های ماتریس C را پیدا می‌کنیم:

$$C=2A-B=2\begin{bmatrix} m-1 & n^2 \\ 3 & -1 \\ 2 & n \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} -m-1 & n+2 \\ m+2 & 3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 3m-1 & 2n^2-n-2 \\ 4-m & -5 \\ 0 & 2n+2 \end{bmatrix}$$

اکنون بنابر فرض سؤال،

$$c_{11}=-c_{22} \Rightarrow 3m-1=-(-5) \Rightarrow 3m=6 \Rightarrow m=2$$

$$c_{21}=3c_{32} \Rightarrow 4-m=3(2n+2)$$

$$\xrightarrow{m=2} 2=6n+6 \Rightarrow n=-\frac{4}{6}=-\frac{2}{3}$$

بنابراین

$$2m+n=4-\frac{2}{3}=\frac{10}{3}$$

۱۵ تساوی اول را در ۲ و تساوی دوم را در ۳ ضرب می‌کنیم، سپس طرفین آنها را با هم جمع می‌کنیم تا ماتریس A به‌دست آید:

$$\begin{cases} 4A+6B=2\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \\ 9A-6B=3\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{+} 13A=\begin{bmatrix} 4 & 10 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 6 & -6 \end{bmatrix}$$

$$13A=\begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow A=\begin{bmatrix} \frac{7}{13} & \frac{10}{13} \\ \frac{4}{13} & \frac{2}{13} \end{bmatrix}$$

۱۶ ماتریس AB قیمت فروش در هر بازار را نشان می‌دهد:

$$AB=\begin{bmatrix} 5000 & 2000 & 1500 \\ 2000 & 2000 & 1000 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 22500 \\ 15000 \end{bmatrix}$$

ماتریس AC قیمت تمام شده در هر بازار را مشخص می‌کند:

$$AC=\begin{bmatrix} 5000 & 2000 & 1500 \\ 2000 & 2000 & 1000 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/8 \\ 3/5 \\ 2/5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 19750 \\ 13100 \end{bmatrix}$$

پس ماتریس AB − AC میزان سود در هر بازار را نشان می‌دهد:

$$AB-AC=\begin{bmatrix} 22500 \\ 15000 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 19750 \\ 13100 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2750 \\ 1900 \end{bmatrix}$$

۱۷ ماتریس AB از مرتبهٔ ۳×۳ و ماتریس BA از مرتبهٔ ۲×۲ است:

$$AB=\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 & 15 & -6 \\ 8 & 10 & 10 \\ -2 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

$$BA=\begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 16 & 20 \\ 3 & -7 \end{bmatrix}$$

۱۸ ابتدا ضرب ماتریس‌های طرف اول تساوی داده شده را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{bmatrix} x^2+2x & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x^2+2x \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} -x^2-2x+2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x^2+2x \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$=(-x^2-2x+2)(x^2+2x)+3$$

بنابراین $(-x^2-2x+2)(x^2+2x)+3=0$.

برای حل این معادله فرض می‌کنیم $x^2+2x=t$،

$$(-t+2)(t)+3=0 \Rightarrow -t^2+2t+3=0 \Rightarrow t^2-2t-3=0$$

$$(t-3)(t+1)=0 \Rightarrow t=3 \text{ یا } t=-1$$

در نتیجه

$$x^2+2x=3 \Rightarrow x^2+2x-3=0$$

$$(x+3)(x-1)=0 \Rightarrow x=-3,\ x=1$$

یا

$$x^2+2x=-1 \Rightarrow x^2+2x+1=0 \Rightarrow (x+1)^2=0 \Rightarrow x=-1$$

بنابراین جواب‌های این معادلهٔ ماتریسی برابر $x=1$، $x=-3$ و $x=-1$ هستند، در نتیجه مجموع جواب‌ها برابر -3 است.

۱۹ فرض می‌کنیم $B=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. در این صورت بنابر فرض سؤال،

$$AB=BA$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2a-c & 2b-d \\ a+2c & b+2d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2a+b & -a+2b \\ 2c+d & -c+2d \end{bmatrix}$$

بنابراین درایه‌های نظیر این دو ماتریس برابرند، در نتیجه $2a-c=2a+b$. پس $b=-c$ یعنی $b+c=0$. بنابراین مجموع درایه‌های قطر فرعی ماتریس B صفر است.

پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱- گزینهٔ ۳ در ماتریس A، تعداد دانش‌آموزان ۱۰۰=۱۰+۹۰ و در ماتریس B تعداد دانش‌آموزان ۵۰=۸+۴۲ است. همچنین،

۱۵۰=۵۰+۱۰۰=تعداد کل دانش‌آموزان

۱۳۲=۴۲+۹۰=تعداد دانش‌آموزان قبول شده در درس هندسه

بنابراین درصد دانش‌آموزان قبول شده در درس هندسه در دو مدرسه برابر است با

$$\frac{132}{150}\times 100=88\%$$

۲- گزینهٔ ۳ درایه‌های ماتریس $A=[2i-j^2]_{2\times 2}$ را تعیین می‌کنیم:

$$A=[2i-j^2]_{2\times 2}=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 3 & 0\end{bmatrix}$$

پس مجموع درایه‌های ماتریس **A** برابر ۲=۰+۳+۲−۱ است.

۳- گزینهٔ ۱ با توجه به تعریف دو ماتریس A و B،

$$a_{21}=2-1=1,\quad a_{32}=6-1=5,\quad b_{12}=1,\quad b_{31}=4$$

بنابراین

$$2a_{21}b_{12}-3a_{32}b_{31}=2(1)(1)-3(5)(4)=2-60=-58$$

۴- گزینهٔ ۱ درایه‌های ماتریس‌های **A** و **B** را با تعریف‌های داده شده به‌دست می‌آوریم:

$$A=[2j-i]_{3\times 3}=\begin{bmatrix}1 & 3 & 5\\ 0 & 2 & 4\\ -1 & 1 & 3\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 3\\ 0 & -2 & 0\\ 1 & -1 & -3\end{bmatrix}$$

بنابراین

$$A-2B=\begin{bmatrix}1 & 3 & 5\\ 0 & 2 & 4\\ -1 & 1 & 3\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}-1 & 1 & 3\\ 0 & -2 & 0\\ 1 & -1 & -3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}3 & 1 & -1\\ 0 & 6 & 4\\ -3 & 3 & 9\end{bmatrix}$$

پس مجموع درایه‌های بالای قطر اصلی ماتریس $A-2B$ برابر است با ۴=۴+۱−۱.

۵- گزینهٔ ۴ ماتریس‌های A و B را در تساوی داده شده قرار می‌دهیم:

$$mA-nB=\begin{bmatrix}-4 & 5\\ 3 & 1\end{bmatrix}$$

$$m\begin{bmatrix}0 & -3\\ 2 & 1\end{bmatrix}-n\begin{bmatrix}1 & 0\\ -2 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4 & 5\\ 3 & 1\end{bmatrix}$$

بنابراین

$$\begin{cases}-n=-4\Rightarrow n=4\\ -3m=5\Rightarrow m=-\frac{5}{3}\\ 2m+2n=3\\ m-3n=1\end{cases}$$

چون مقادیر به‌دست آمده برای **m** و **n** در دو معادلهٔ دیگر صدق نمی‌کنند، پس چنین **m** و nای وجود ندارند.

۶- گزینهٔ ۲ با توجه به تعریف ماتریس‌های A و B، درایه‌های این دو ماتریس را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases}a_{11}=2^0=1, & a_{12}=2^{-1}=\frac{1}{2}\\ a_{21}=2^1=2, & a_{22}=2^0=1\end{cases}\Rightarrow A=\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ 2 & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases}b_{11}=(-1)^2=1, & b_{12}=(-1)^3=-1\\ b_{21}=(-1)^3=-1, & b_{22}=(-1)^4=1\end{cases}\Rightarrow B=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$$

اکنون می‌توانیم ماتریس $2A+B$ را به‌دست آوریم:

$$2A+B=2\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ 2 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 3 & 3\end{bmatrix}$$

۷- گزینهٔ ۲ از دستگاه دادشده ماتریس A را به‌دست می‌آوریم:

$$3\times\begin{cases}A+B=\begin{bmatrix}3 & -2\\ 1 & 0\end{bmatrix}\\ 2A-3B=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\end{bmatrix}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3A+3B=\begin{bmatrix}9 & -6\\ 3 & 0\end{bmatrix}\\ 2A-3B=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\end{bmatrix}\end{cases}$$

$$\xrightarrow{+}5A=\begin{bmatrix}11 & -5\\ 3 & 3\end{bmatrix}\Rightarrow A=\begin{bmatrix}\frac{11}{5} & -1\\ \frac{3}{5} & \frac{3}{5}\end{bmatrix}$$

بنابراین درایهٔ سطر اول و ستون دوم ماتریس **A** برابر ۱− است.

۸- گزینهٔ ۳ می‌دانیم ضرب دو ماتریس در حالت کلی خاصیت جابه‌جایی ندارد. در این مسئله فرض بر این است که $AB=BA$. بنابراین

$$AB=BA$$

$$\begin{bmatrix}1 & b\\ 2 & a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 1 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & b\\ 2 & a\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}-1+b & 3-b\\ -2+a & 6-a\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & -b+3a\\ -1 & b-a\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases}-1+b=5\Rightarrow b=6\\ -2+a=-1\Rightarrow a=1\end{cases}$$

توجه کنید که $a=1$ و $b=6$ در دو معادلهٔ دیگر نیز صدق می‌کنند، پس این مقادیر قابل قبول هستند. بنابراین $a+b=7$.

۹- گزینهٔ ۲ از تساوی داده شده از سمت چپ ماتریس A و از سمت راست ماتریس B را فاکتورگیری می‌کنیم:

$$A\begin{bmatrix}2 & -1\\ -3 & 7\end{bmatrix}B+A\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 3 & -6\end{bmatrix}B=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}$$

$$A\Big(\underbrace{\begin{bmatrix}2 & -1\\ -3 & 7\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 3 & -6\end{bmatrix}}_{I_2}\Big)B=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}$$

$$AIB=AB=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}$$

از طرف دیگر طبق فرض $AB=\begin{bmatrix}-1 & \alpha-1\\ 0 & \beta+1\end{bmatrix}$، در نتیجه

$$\alpha-1=0\Rightarrow\alpha=1\,,\quad \beta+1=3\Rightarrow\beta=2$$

بنابراین $2\alpha+\beta=2+2=4$.

۱۰- گزینهٔ ۱ ابتدا ماتریس‌های AB و BA را به‌دست می‌آوریم:

$$AB=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$$

$$BA=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

پس

$$AB-BA=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ -2 & 1\end{bmatrix}$$

بنابراین

$$(AB-BA)^2=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ -2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0\\ -2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

۱۱- گزینهٔ ۳ ابتدا حاصل‌ضرب $A\times B$ را پیدا می‌کنیم:

$$A\times B=\begin{bmatrix}4 & a\\ b & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & -3\\ 3 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}16+3a & -12-2a\\ 4b-6 & -3b+4\end{bmatrix}$$

در ماتریس قطری درایه‌های بالا و پایین قطر اصلی همیشه صفر هستند، پس برای اینکه AB ماتریس قطری باشد، باید

$$\begin{cases}4b-6=0\Rightarrow b=\dfrac{3}{2}\\ -12-2a=0\Rightarrow a=-6\end{cases}$$

بنابراین

$$a-2b=-6-3=-9$$

۱۲- گزینهٔ ۴ مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس حاصل‌ضرب مورد نظر است، پس فقط درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس ضرب را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{bmatrix}3 & -1 & 5\\ 0 & 4 & 2\\ 0 & 0 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 6 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3-2+0 & ? & ?\\ ? & 0+4+12 & ?\\ ? & ? & 0+0+14\end{bmatrix}$$

پس مجموع درایه‌های قطر اصلی این ماتریس برابر است با

$$-5+16+14=25$$

۱۳- گزینهٔ ۲ درایه‌های ماتریس‌های A و B را به‌دست می‌آوریم:

$$A=\begin{bmatrix}2 & -1 & -2\\ 0 & 4 & -1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}-1 & -3\\ 2 & 0\\ 7 & 5\end{bmatrix}$$

اکنون می‌توانیم ماتریس AB را به‌دست آوریم:

$$AB=\begin{bmatrix}2 & -1 & -2\\ 0 & 4 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & -3\\ 2 & 0\\ 7 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-18 & -16\\ 1 & -5\end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌های ماتریس AB برابر است با

$$-18-16+1-5=-38$$

۱۴- گزینهٔ ۱ برای به‌دست آوردن درایهٔ سطر دوم، ستون اول ماتریس D باید سطر دوم A را در ماتریس B ضرب و سپس حاصل را در ستون اول C ضرب کنیم (به سایر درایه‌های ماتریس D احتیاجی نداریم):

$d_{21} = A$ سطر دوم $\times$ ماتریس $B \times$ ستون اول C

$$d_{21}=\begin{bmatrix}0 & 2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\\ 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}10 & 16\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}=10-16=-6$$

۱۵- گزینهٔ ۳ از فرض $AB+BA=\overline{O}$ به صورت زیر استفاده می‌کنیم:

$$AB+BA=\overline{O}\xrightarrow[\text{ضرب می‌کنیم}]{\text{A را از چپ}}A^2B+ABA=\overline{O}$$

$$AB+BA=\overline{O}\xrightarrow[\text{ضرب می‌کنیم}]{\text{A را از راست}}ABA+BA^2=\overline{O}$$

$$A^2B-BA^2=\overline{O}\Rightarrow A^2B=BA^2$$

۱۶- گزینهٔ ۴ با استفاده از خاصیت پخشی ضرب ماتریس در جمع، ماتریس A^2+AB را به صورت $A(A+B)$ می‌نویسیم. در نتیجه

$$A^2+7B+AB=A(\underbrace{A+B}_{7I})+7B$$

$$=7A+7B=7(\underbrace{A+B}_{7I})=49I$$

۱۷- گزینهٔ ۴ از فرض $AB+2BA=\overline{O}$ نتیجه می‌گیریم $AB=-2BA$، پس

$$A^2B=A(AB)=A(-2BA)=-2(AB)A$$

$$=-2(-2BA)A=4BA^2$$

بنابراین A^2B برابر $4BA^2$ است.

۱۸- گزینهٔ ۴ از فرض $2AB+BA=\overline{O}$ نتیجه می‌گیریم $AB=-\frac{1}{2}BA$. با توجه به خاصیت شرکت‌پذیری ضرب ماتریس‌ها می‌نویسیم:

$$AB^3=(AB)B^2=(-\frac{1}{2}BA)B^2=-\frac{1}{2}B(AB)B$$

$$=-\frac{1}{2}B(-\frac{1}{2}BA)B=\frac{1}{4}B^2(AB)$$

$$=\frac{1}{4}B^2(-\frac{1}{2}BA)=-\frac{1}{8}B^3A$$

پس $AB^3=-\frac{1}{8}B^3A$، در نتیجه $\lambda=-\frac{1}{8}$.

۱۹- گزینهٔ ۳ از فرض $A^2-A=\overline{O}$ نتیجه می‌گیریم $A^2=A$، پس A ماتریس خودتوان است، یعنی هر توان A برابر A است. برای محاسبهٔ $(2A-I)^{25}$ ابتدا ماتریس $(2A-I)^2$ را به‌دست می‌آوریم:

$$(2A-I)^2=4A^2+I-4A=4A+I-4A=I$$

$$(2A-I)^{25}=[\underbrace{(2A-I)^2}_{I}]^{12}(2A-I)$$

$$=I^{12}(2A-I)=2A-I$$

۲۰- گزینهٔ ۳ از رابطهٔ $A^2=3A-2I$ ماتریس A^4 را به‌دست می‌آوریم:

$$A^2=3A-2I\xrightarrow{\text{توان ۲}}A^4=9A^2+4I-12A$$

$$\xrightarrow{A^2=3A-2I}A^4=9(3A-2I)+4I-12A$$

$$A^4=27A-18I+4I-12A\Rightarrow A^4=15A-14I$$

اکنون ماتریس A^5 را به‌دست می‌آوریم:

$$A^4=15A-14I\xrightarrow[\text{می‌کنیم}]{\text{در A ضرب}}A^5=15A^2-14A$$

$$\xrightarrow{A^2=3A-2I}A^5=15(3A-2I)-14A$$

$$A^5=45A-30I-14A\Rightarrow A^5=31A-30I$$

بنابراین ماتریس A^5-A^4 برابر است با

$$A^5-A^4=(31A-30I)-(15A-14I)$$

$$=16A-16I=16(A-I)$$

با مقایسهٔ تساوی به‌دست آمده و رابطهٔ $A^5-A^4=k(A-I)$ نتیجه می‌گیریم $k=16$.

۲۱- گزینهٔ ۲ طرفین فرض $A^2=4A-3I$ را در A ضرب می‌کنیم:

$$A^2=4A-3I\xrightarrow{\times A}A^3=4A^2-3A$$

$$\xrightarrow{A^2=4A-3I}A^3=4(4A-3I)-3A$$

$$A^3=16A-12I-3A\Rightarrow A^3=13A-12I$$